Exercice 1: Lancers de dé

1) Soit X_i la variable aléatoire du résultat d'un ième lancer de dé $X_i \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,6\})$ (uniforme sur $\{1,\dots,6\}$):

$$\mu = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3.5$$
$$\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{91}{6} \approx 15.17$$
$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1] = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12} \approx 2.92$$

2) $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Avec le théorème central limite quand n tend vers $+\infty$ la loi de M_n est celle d'une gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = \mathcal{N}(3.5, \frac{35}{12n})$

Soit X la v.a d'une loi normale d'espérance μ. Soient f sa fonction de densité et F sa fonction de répartition.
La courbe de f a pour axe de symétrie $x = \mu$ i.e.

$$\begin{aligned}
\forall x, f(\mu - x) &= f(\mu + x)\\
F(\mu + x) + F(\mu - x) &= 1\\
F(\mu) &= 0.5 \qquad \text{(La médiane, avec } x = 0)\\
P(X \in [\mu - x, \mu + x]) &= 1 - 2F(\mu - x)\\
P(X \in [\mu - x, \mu + x]) &= 2F(\mu + x) - 1
\end{aligned}$$

En particulier pour une gaussienne centrée ($X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$):

$$\begin{aligned}
\forall x, P(X \in [-x, x]) &= 1 - 2F(-x)\\
P(X \in [-x, x]) &= 2F(x) - 1
\end{aligned}$$

3) On pose $Z_n = \dfrac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ i.e $M_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n + \mu$ et $Z_n \sim N(0,1)$. Soit F la répartition de Z_n.

$$\begin{aligned}
P(M_n \in [3,4]) &= P(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n + \mu \in [\mu - 0.5, \mu + 0,5])\\
&= P(Z_n \in [-0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}, 0,5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}])\\
&= 1 - 2F(-0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(M_n \in [3,4]) \geq 0.99 &\iff 1 - 2F(-0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}) \geq 0.99\\
&\iff F(-0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}) \leq 0.005\\
&\iff -0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \texttt{qnorm}(0.005)\\
&\iff n \geq 4\sigma^2(\texttt{qnorm}(0.005))^2\\
&\iff n \geq 78
\end{aligned}$$

Exercice 2

1) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de vis défectueuses parmi 600.

$$X \sim \mathcal{B}(n = 600, p = 0.04)$$

2/3) Par le théorème central limite, pour n grand:

$$X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(24, 23.04)$$

4)

$$\begin{aligned}
P(X \geq 27) &= 1 - P(X \leq 27)\\
&= 1 - \texttt{pnorm}(27, 24, \sqrt{23.04})\\
&= 0.27
\end{aligned}$$

Exercice 3

1) Soit X la v.a représentant le nombre de commandes passées après $n = 60$ appels, chachun avec une probabilité de réussite $p = 0.2$.

$$X \sim \mathcal{B}(60, 0.2)$$

2) Pour n grand $X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(12, \sigma^2 = 9.6)$
3)

$$\begin{aligned}
P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15)\\
&= 1 - \texttt{pnorm}(15, 12, \sqrt{9.6})\\
&= 0.17\\
P(X < 10) &= \texttt{pnorm}(10, 12, \sqrt{9.6})\\
&= 0.26
\end{aligned}$$

4) Soit $Z = \dfrac{X - np}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 15) \geq 0.75 &\iff P(\sigma Z + np \geq 15) \geq 0.75\\
&\iff P(Z \geq \frac{15 - np}{\sigma}) \geq 0.75\\
&\iff 1 - P(Z \leq \frac{15 - np}{\sigma}) \geq 0.75\\
&\iff P(Z \leq \frac{15 - np}{\sigma}) \leq 0.25\\
&\iff \frac{15 - np}{\sigma} \leq \texttt{qnorm}(0.25) = q\\
&\iff \frac{15 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq q
\end{aligned}$$

Résolvons l'équation de variable n:

$$15 - np = q\sqrt{np(1-p)}$$

Comme $q \leq 0$, alors $n \geq 75$.

$$\begin{aligned}
15 - np = q\sqrt{np(1-p)} &\implies 225 - 30np + p^2n^2 = q^2p(1-p)n\\
&\implies 0.04n^2 - 6.07n + 225 = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta = 6.07^2 - 4 \times 225 \times 0.04 = 0.88$$

D'où $n \in \{87.59, 64.15\}$ et

$$P(X \geq 15) \geq 0.75 \iff n \geq 88$$

Exercice 4

1) Soit X le nombre de skieurs sur une journée,

$$X \sim \mathcal{N}(50000, 8000^2)$$

$$P(X \leq 55000) = \texttt{pnorm}(55000, 50000, 8000) = 73.40\%$$

ce tourisme est donc gérable.

2) Soit $\bar{X}$ la moyenne des skieurs sur 10 journées. Avec le théorème centrale limite, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(50000, \frac{8000^2}{10})$

$$P(\bar{X} \leq 55000) = \texttt{pnorm}(55000, 50000, 8000/\sqrt{10}) = 97.59\%$$

Exercice 5

Soit X le résultat d'un test QI $X \sim \mathcal{N}(102, 15^2)$
1)

$$P(X \leq 100) = \texttt{pnorm}(100, 102, 15) = 44.69\%$$

2) Soit $\bar{X}_{20}$ la moyenne du QI sur un groupe de 20 individus.

$$\bar{X}_{20} \sim \mathcal{N}(102, \frac{15^2}{20})$$

$$P(\bar{X}_{20} \leq 100) = \texttt{pnorm}(100, 102, 15/\sqrt{10}) = 27.55\%$$

3) Soit n la taille du groupe et $\bar{X}_n$ la moyenne du QI sur un groupe de taille n.

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(102, \frac{15^2}{n})$$

Soit Z la variable aléatoire telle que $\bar{X}_n = \frac{15}{\sqrt{n}} Z + 102$.
Z est une gaussienne centrée réduite i.e. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}
P(\bar{X}_n \leq 100) \leq 0.05 &\iff P(102 + \frac{15}{\sqrt{n}} Z \leq 100) \leq 0.05 \\
&\iff P(Z \leq -\frac{2\sqrt{n}}{15}) \leq 0.05 \\
&\iff -\frac{2\sqrt{n}}{15} \leq \texttt{qnorm}(0.05) \\
&\iff n \geq \left(\frac{15}{2}\texttt{qnorm}(0.05)\right)^2 \\
&\iff n \geq 153
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit X la taille d'un homme français tiré au hasard. $X \sim \mathcal{N}(172, 14^2)$

1) $P(X \leq 160) = \texttt{pnorm}(160, 160, 14) = 19.56\%$

2) $P(X \geq 200) = 1 - \texttt{pnorm}(200, 160, 14) = 2.27\%$

3)

$$\begin{aligned}
P(165 < X \leq 185) &= \texttt{pnorm}(185, 160, 14) - \texttt{pnorm}(165, 160, 14) \\
&= 51.49\%
\end{aligned}$$

4) Soit Y la taille d'une femme française tirée au hasard. On a $Y \sim \mathcal{N}(162, 12)$ et $Y - X \sim \mathcal{N}(-10, 14^2 + 12^2)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq Y) &= P(Y - X \leq 0) \\
&= \texttt{pnorm}(0, -10, \sqrt{144 + 196}) \\
&= 70.62\%
\end{aligned}$$