Exercice 3: Une loi quelconque

1/2) Densité de X:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, \ \text{si } x \in [0,2] \\ x+1, \ \text{si } x \in]-1,0[\\ 0, \ \text{sinon} \end{cases}$$

f est une fonction de densité ssi f est positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
f positive $\iff k \geq 0$ et on a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{2} kx^2 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[k\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{8}{3}k \end{aligned}$$

D'où:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{8}{3}k = 1 \iff k = \frac{3}{16}$$

3) L'espérance de X:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_{0}^{2} kx^3 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{k}{4}x^4\right]_{0}^{2} \\ &= -\frac{1}{6} + 4k = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

4) Fonction de répartition:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < -1 \\ 1 \text{ , si } t > 2 \\ \displaystyle\int_{-1}^{t} (x+1)dx \text{ , si } t \in]-1,0[\\ \displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{t} kx^2 dx \text{ , si } x \in [0,2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < -1 \\ 1 \text{ , si } t > 2 \\ \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2} \text{ , si } t \in]-1,0[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{3}t^3 dx \text{ , si } t \in [0,2] \end{cases} \end{aligned}$$

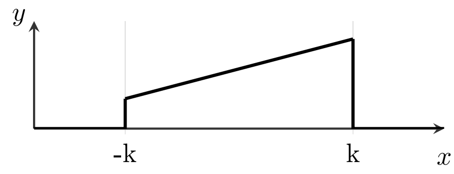
5) Probabilités:

$$\begin{aligned} &P(X < 1/2) = F(1/2) \\ &P(X < 5) = F(5) = 1 \\ &P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) \\ &P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 4: Une loi quelconque

1) Densité de X:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \ \text{si } |x| \leq k \\ 0, \ \text{sinon} \end{cases}$$



f est une fonction de densité ssi f est positive et $\int f(x)dx = 1$.

$$\begin{aligned} \forall x, \ f(x) \geq 0 &\implies f(-k) \geq 0 \\ &\implies 1 - k \geq 0 \\ &\implies k \leq 1 \end{aligned}$$

f est croissante sur $[-k,k]$ donc:

$$\forall x \in [-k,k], \ f(x) \geq f(-k)$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} k \leq 1 &\implies f(-k) \geq 0 \\ &\implies \forall x \in [-k,k], \ f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

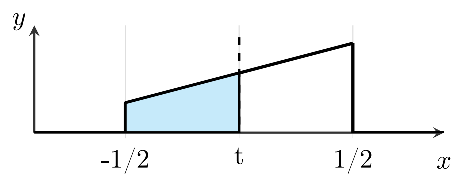
Intiégrons maintenant f sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-k}^{k} (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right] = 2k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff k = 1/2$$

2) Fonction de répartition:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } t < -1/2 \\ 1 \text{ , si } t > 1/2 \\ \displaystyle\int_{-1/2}^{t} (1+x)dx = \frac{t^2}{2} + t + \frac{3}{8}, \text{ sinon} \end{cases}$$



3) $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}[X]$ et $\mathbb{E}\big[1 + X^2\big]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} x(x+1)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^2(x+1)dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{11}{144}$$
$$\mathbb{E}\left[1+X^2\right] = 1 + \mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{13}{12}$$

4) Soit $T = 1+X^2$ et notons F_X la fonction de répartition de X et F_T celle de T.

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(1+X^2 \leq t)$$
$$= P(X^2 \leq t-1)$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 1 \\ P(-\sqrt{t-1} \leq X \leq \sqrt{t-1}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 1 \\ F_X(\sqrt{t-1}) - F_X(-\sqrt{t-1}) \text{ , sinon} \end{cases}$$

$$-\sqrt{t-1} < -1/2 \iff \sqrt{t-1} > 1/2 \iff t > \frac{5}{4}$$

Ainsi:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 \text{ ,si } t < 1 \\ 1 \text{ , si } t > \frac{5}{4} \\ \frac{t-1}{2} + \sqrt{t-1} + 3/8 - (\frac{t-1}{2} - \sqrt{t-1} + 3/8) \text{, sinon} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ ,si } t < 1 \\ 1 \text{ , si } t > \frac{5}{4} \\ 2\sqrt{t-1} \text{, sinon} \end{cases}$$

Notons f_T la densité de T:

$$f_T(x) = \frac{dF_T(x)}{dx} = \begin{cases} 0 \text{ ,si } t < 1 \\ 0 \text{ , si } t > \frac{5}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{t-1}} \text{, sinon} \end{cases}$$

Recalculons maintenant l'espérance de T:

$$\mathbb{E}[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)dx$$
$$= \int_{1}^{5/4} \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

Par changement de variable $u = x - 1$

$$\mathbb{E}[T] = \int_{0}^{1/4} \frac{u+1}{\sqrt{u}}du = \int_{0}^{1/4} \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}du$$
$$= \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} + 2\sqrt{u}\right]_0^{1/4}$$
$$= \frac{13}{12}$$

Une loi quelconque:

Densité de X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x}, \text{ si } x \in [1, e[\\ x, \text{ si } x \in]0,1[\\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

f est positivie $\iff$ $k \geq 0$ et:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff \int_0^1 xdx + \int_1^e \frac{k}{x}dx = 1$$
$$\iff \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [k\ln(x)]_1^e = 1$$
$$\iff k = \frac{1}{2}$$

Espérance de X:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{x}{2x}dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^e = \frac{e}{2} - \frac{1}{6}$$

Variance de X:

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^e \frac{x^2}{2x}dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4}$$
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 == \frac{e^2}{4} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{6}\right)^2$$
$$= \frac{e}{6} - \frac{1}{36}$$

Fonction de répartition:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ , si } x < 0 \\ 1 \text{ , si } x > e \\ \displaystyle\int_0^t xdx \text{ , si } t \in]0,1[\\ \displaystyle\int_0^1 xdx + \int_1^t \frac{1}{2x} \text{ , si } x \in]1, e[\end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ , si } x < 0 \\ 1 \text{ , si } x > e \\ \dfrac{t^2}{2} \text{ , si } t \in]0,1[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln t \text{ , si } t \in]1, e[\end{cases}$$

Probabilités:

$$P(x < 1) = F(1) = \frac{1}{2}$$
$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$$
$$P(X = 1) = P(1) - P(1^-) = 0$$

Loi exponentielle

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie I:

1) f est positive et on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Donc f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2) Fonction de répartition:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 0 \\ \int_0^t f(x)dx \text{ , sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 0 \\ \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \text{ , sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3) Espérance de X:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x(-e^{-\lambda x})'dx \\ \text{(par IPP)} &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}dx \\ &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Rappelons que:

$$\forall \lambda > 0, \lim_{x \to +\infty} xe^{-\lambda x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$$

Ainsi:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Moment d'ordre 2 et variance:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2(-e^{-\lambda x})'dx \\ &= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right] - \int_0^{+\infty} -2xe^{-\lambda x}dx \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

D'où $\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Partie II:

Au bout de $T \sim \mathcal{E}(k)$ (loi exponentielle de paramétre k), un atome se désintègre.

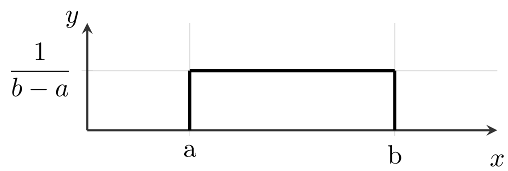
1) L'espérance de vie d'un atome est $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{k}$.
2) $P(T > 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-k}) = e^{-k}$.
3) $p(t) = P(T \in [0, t]) = F(t) - F(0) = 1 - e^{-kt}$.
4) Soit X_t le nombre d'atomes s'etant désintégrés dans l'intervalle $[0, t]$:

$$P(X_t = m) = C_N^m p(t)^m (1 - p(t))^{N-m}$$

X_t suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N, p(t))$.
N est le nombre d'expériences réalisées, ici le nombre d'atomes, et $p(t)$ la probabilité de succès i.e. la désintégration d'un atome.

Exercice 7: La loi uniforme

1)



2) Comme $b > a$ alors f est positive. Et on a:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = 1$$

3) Répartition:

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < a \\ 1, \text{ si } t > b \\ \int_a^t \frac{1}{b-a}dx = \frac{t-a}{b-a}, \text{ si } t \in [a, b] \end{cases}$$

4) Espérance:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Rappelons les identités:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \; a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$$

Moment d'ordre 2 et variance:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

D'où $\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exercice 8: La loi normale

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ i.e X suit une loi normale avec $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}[X] = \sigma^2$.
1) Densité de X:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

2) Répartition:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Remarque: Il n'exsite pas d'expression analytique de cette intégrale.
3) Soit $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ et soit F_Y sa fonction de répartition:

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = P(Y \leq t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t\right) \\
&= P(X \leq \mu + t\sigma) \\
&= F(\mu + t\sigma) \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+t\sigma} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+t\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dx
\end{aligned}$$

Considérons le changement de variable:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ dy = \frac{1}{\sigma}dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y)^2\right)\sigma dy \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y)^2\right)dy
\end{aligned}$$

Ainsi Y a pour fonction de répratition celle d'une loi normale centrée réduite ($Y \sim \mathcal{N}(0,1)$)

Exercice 9:

Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$ (moyenne 1 et ecart-type 2).
1) $P(X < 1.6) =$ `pnorm(1.6 , mean=1, sd=2)` ≈ 0.618.
2) $P(X < u) = 0.95 \implies u =$ `qnorm(0.95 , mean=1, sd=2)` ≈ 4.29.

Exercice 10:

On note par X_i la v.a du poids du ième passager avec son bagage.
On a $\{X_i\}_{1 \leq i \leq 100}$ i.i.d avec $X_1 \sim \mathcal{N}(100, 20^2)$.
Soit Y le poids total de l'avion en tonnes:

$$Y = 120 + \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),$$

Avec $\mu = 120 + 100 \times \dfrac{\mathbb{E}[X_i]}{1000} = 130$
et $\sigma^2 = 100 \times \left(\dfrac{20}{1000}\right)^2 = 0.04$
soit $Y \sim \mathcal{N}(130, 0.04)$.
La probabilité de décollage:
$P(Y <= 130.5) =$ `pnorm(130.5, 130, 0.2)` ≈ 0.994

Exercice 11:

Soit X le poids de poudre en mg par flacon.
$X \sim \mathcal{N}(m, 1, 1^2)$.
1) Avec $m = 101.2$:
$P(X \leq 100) =$ `pnorm(100, 101.2, 1.1)` ≈ 0.138.
2) On cherche m pour que $P(X \leq 100) = 0.04$.
Posons $Y = \dfrac{X-m}{1,1}$:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 100) &= P(1.1Y + m \leq 100) \\
&= P\left(Y \leq \frac{100-m}{1.1}\right)
\end{aligned}$$

Avec `qnorm`:

$$\frac{100-m}{1.1} = \texttt{qnorm(0.04, mean=0, sd=1)}$$

Soit:
$m = 100 - 1.1 \times$ `qnorm(0.04, mean=0, sd=1)` ≈ 101.926.

Exercice 12:

Soit $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\text{Var}[X_1] = \sigma^2$ et soit Z la moyenne des X_i i.e :

$$Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1) Espérance de Z:

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n}\sum_i \mathbb{E}[X_i] = \mu$$

1) Variance de Z:

$$\text{Var}[Z] = \frac{1}{n^2}\sum_i \text{Var}[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}$$

3) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(Z - \mu)$ est centrée réduite.