

Statistiques et Probabilités

UIT II Informatique - S3 -M3201

Maha Elbayad

maha.elbayad@inria.fr

Franck Corset

franck.corset@univ-grenoble-alpes.fr

Cours disponible sur

<https://fcorset.github.io/cours/cours.html>

16 Sept. 2019

La loi normale

On appelle loi normale la loi d'une variable aléatoire réelle continue X dont la densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right),$$

où μ est la moyenne de X ($\mathbb{E}[X] = \mu$) et σ^2 est la variance de X ($\text{Var}[X] = \sigma^2$).

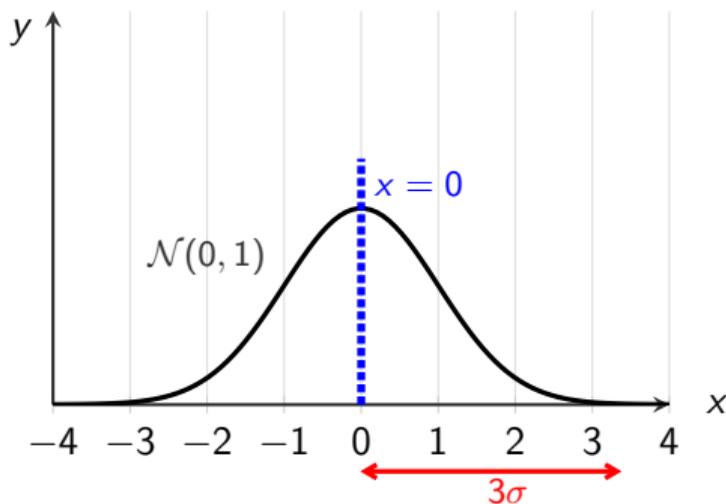
On dit que X suit la loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (ou $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

- Si $\mu = 0$, on dit que X est **centrée**.
- Si $\sigma^2 = 1$, on dit que X est **réduite**.

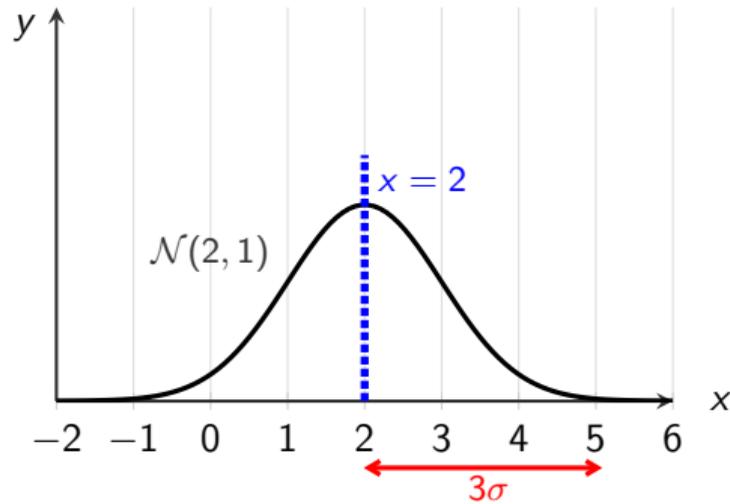
La loi normale est également appelée **loi gaussienne**.

La loi normale

Deux lois normales de même variance:



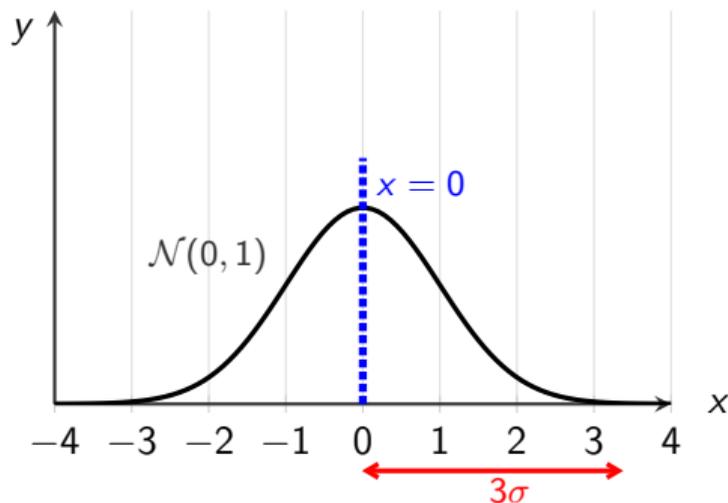
Loi normale centrée réduite



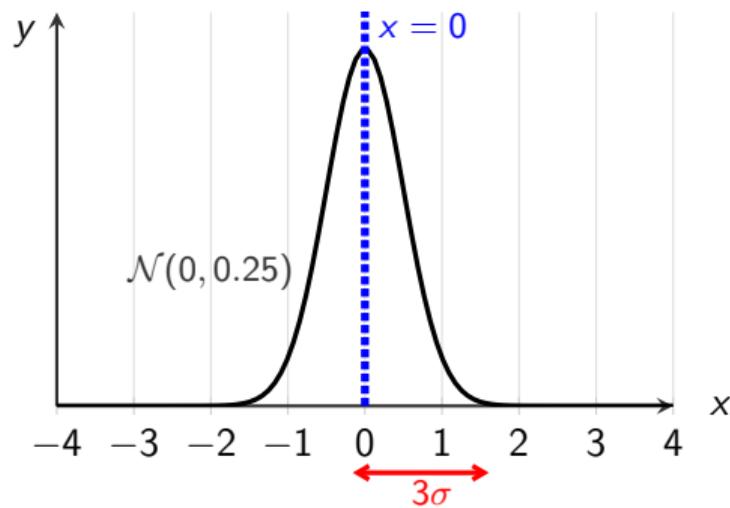
Loi normale réduite de moyenne 2

La loi normale

Deux lois normales de même espérance:



Loi normale centrée réduite



Loi normale centrée de variance $\sigma^2 = 0.25$

La loi normale

Proposition:

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Rappelons que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$ et $\mathbb{E}[aX + b] = a \mathbb{E}[X] + b$
D'où:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] &= \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}[X] - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0 \\ \text{Var}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] &= \frac{1}{\sigma^2}(\text{Var}[X] - \text{Var}[\mu]) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 - 0) = 1\end{aligned}$$

La loi normale sur \mathbb{R}

Pour une loi normale $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- Densité $f(x)$: `dnorm(x, mean= μ , sd= σ)` # Par défaut $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
- Répartition $F(x)$: `pnorm(x, mean= μ , sd= σ)`
- Quantile d'ordre p : `qnorm(p, mean = μ , sd = σ)`
- Simulation d'un échantillon de taille N d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:
`rnorm(N, mean= μ , sd= σ)`