Statistiques et Probabilités

UIT II Informatique - S3 -M3201

Maha Elbayad maha.elbayad@inria.fr
Franck Corset franck.corset@univ-grenoble-alpes.fr

Cours disponible sur **https://fcorset.github.io/cours/cours.html**

30 Sept. 2019

Loi forte des grands nombres

Théorème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et identiquement distribuées. Considérons la moyenne empirique:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Supposons que $\mathbb{E}[X_1]$ est finie, on a:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[X_1]$$

Loi forte des grands nombres

Application au calcul d'intégrales:
Soit g un fonction continue sur $[0,1]$, on veut calculer

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx$$

On peut se servir d'une v.a X suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ pour calculer I avec:

$$\mathrm{I} = \mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x)f(x)dx$$

Rappelons la densité de X: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [0,1] \\ 0, \ \text{, sinon} \end{cases}$

D'après la loi forte des grands nombres, pour X_i i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[g(X_1)] = I$$

Loi forte des grands nombres

La loi forte des grands nombres

Central limite

Exemple:
On souhaite calculer l'intégrale suivante où $g(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Analytiquement, on peut calculer I avec le changement de variable:

$$\begin{cases} x = \sin(u) \\ u = \arcsin(x) \\ dx = \cos(u)du \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)cos(u)du} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

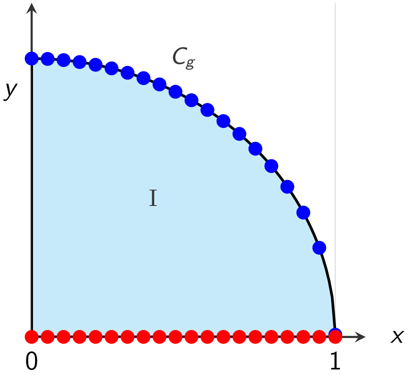
Exemple:

Avec une approximation (méthode de Monte Carlo):

$S = 0$; Pour $i \in [1 \ldots n]$:

1. Echantillonner $X_i \sim \mathcal{U}([0,1])$
2. $S {+}{=} g(X_i)$

$\hat{\mathrm{I}} = \frac{S}{n}$



Loi forte des grands nombres

Approximation des intégrales par Monte Carlo:

Cas particulier:
Soit X une v.a de loi uniforme sur $[0,1]$. $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx = \mathbb{E}[g(X)]$$

$\forall i \in [1..N],\ X_i \sim X,$ (Echantillon de X)

$$\hat{\mathrm{I}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)$$

Ici $\forall x \in [0,1], f(x) = 1.$

Pour une loi quelconque:
Soit X une v.a de support $]a,b[$ et de fonction de densité f:

$$\mathrm{I} = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \mathbb{E}[g(X)]$$

$\forall i \in [1..N],\ X_i \sim X,$ (Echantillon de X)

$$\hat{\mathrm{I}} = \frac{1}{N}\sum_i \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

Théorème central limite

Théorème

La somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi suit approximativement une loi normale.

Proposition:

Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de v.a indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), de moyenne $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et de variance $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$, alors:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Ou encore:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

Théorème central limite

Proposition:

La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ d'esérance np, et de variance $np(1-p)$ se comporte comme $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ pour n grand.